×I28×

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1977

CONCOURS DE RECRUTEMENT

DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION

DE L'AVIATION CIVILE

ET DES INGENIEURS TITULAIRES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 H 00
Coef. ; 4

I

p,q,r,n sont des entiers positifs.

Soit $\mathcal{M}_{p,q}$ l'espace vectoriel complexe des matrices à p lignes et q colonnes dont les éléments sont complexes.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_{p,q}$; $|a_{i,j}|$ désigne le module de l'élément $a_{i,j}$ de A situé sur la ligne de rang i et la colonne de rang j.

A tout élément A de $\mathcal{M}_{p,q}$ on associe le nombre

$$\|A\| = \sup_{i,j} \{|a_{i,j}|\}$$

I-1 Montrer que cette application de $\mathcal{M}_{p,q}$ dans $\mathbb{R}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}$.

I-2 Soit $\{A^{(n)}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}$; on note par $a_{i,j}^{(n)}$ les éléments de la matrice $A^{(n)}$. Démontrer qu'au sens de la norme $\mathcal{M}_{p,q}$ la suite $\{A^{(n)}\}$ converge dans cet espace vers une matrice A d'éléments $a_{i,j}$ si et seulement si :

pour tout i et pour tout j , la suite $\{a_{i,j}^{(n)}\}$ converge dans $\mathbb{C}$ et la limite de $a_{i,j}^{(n)}$, lorsque n tend vers l'infini, est $a_{i,j}$.

I-3 Soit $\{A^{(n)}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,p}$ qui converge dans cet espace vers la matrice A; on désigne respectivement par $D(A^{(n)})$ et $D(A)$ les déterminants de $A^{(n)}$ et de A. Démontrer que la limite de $D(A^{(n)})$ lorsque n tend vers l'infini, est $D(A)$.

.../...

I-4 Les suites $\{A^{(n)}\}$ et $\{B^{(n)}\}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}$ convergeant dans cet espace respectivement vers les matrices A et B, déterminer la limite de la suite $\{A^{(n)} + B^{(n)}\}$.

Soit $\{A^{(n)}\}$ une suite, d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}$ convergeant, dans cet espace, vers la matrice A et $\{B^{(n)}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{q,r}$ convergeant, dans cet espace, vers la matrice B : déterminer la limite de la suite $\{C^{(n)} = A^{(n)}\ B^{(n)}\}$, où $A^{(n)}\ B^{(n)}$ est le produit des matrices $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$.

II

P est une matrice élément de $\mathcal{M}_{p,p}$ et P^n désigne la puissance n de P.

On suppose que la suite $\{P^{(n)} = P^n\}$ converge dans $\mathcal{M}_{p,p}$ vers la matrice 0 dont tous les éléments sont nuls (élément neutre de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{p,p}$).

I désigne la matrice de $\mathcal{M}_{p,p}$ dont les éléments sont nuls à l'exception de ceux qui sont situés sur la diagonale principale et dont la valeur est 1.

II-1 On pose $B^{(n)} = I + P + \ldots + P^n$. Déterminer la matrice $C^{(n)}$ définie par le produit

$$C^{(n)} = (I-P)\ B^{(n)}$$

en fonction de I et d'une puissance de P.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, du déterminant $D\left(C^{(n)}\right)$ de $C^{(n)}$.

II-2 Démontrer alors que la matrice I-P est inversible; en déduire que la suite $\{B^{(n)}\}$ converge dans $\mathcal{M}_{p,p}$ et déterminer sa limite.

II-3 Dans le cas particulier où

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, calculer P^n pour tout n.

Sans utiliser les résultats de II.2, démontrer directement que $\{B^{(n)}\}$ converge dans $\mathcal{M}_{p,p}$ et déterminer sa limite; vérifier que cette dernière est bien identique à celle que l'application des résultats de II.2 permet d'obtenir.

×I30×

III

Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_{3,3}$ dont les valeurs propres s_1, s_2 et s_3 sont distinctes et vérifient :

$$|s_1| > |s_2| \gg |s_3| > 0 .$$

Soit U_1, U_2, et U_3 trois matrices de $\mathcal{M}_{3,1}$, formant un système libre et tels que :

$$AU_1 = s_1 U_1 \; ; \quad AU_2 = s_2 U_2 \; ; \quad AU_3 = s_3 U_3$$

III-1 Soit $V^{(o)} = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3$ où C_1, C_2 et C_3 sont des complexes quelconques, mais tels que $C_1 \neq 0$.

On pose pour tout n : $V^{(n)} = A^n V^{(o)}$, où A^n est la puissance n de A.

Démontrer que la suite $\left\{ \frac{1}{s_1^n} V^{(n)} \right\}$ est convergente et déterminer sa limite.

Si T_n désigne la somme des composantes de $V^{(n)}$ dans le système U_1, U_2, U_3, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\frac{T_{n+1}}{T_n}$.

III-2 Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

déterminer ses valeurs propres et un système de ses vecteurs propres.

III-3 On se propose d'utiliser les résultats de III-1 pour retrouver, avec une certaine approximation, les valeurs des valeurs propres de A sans résoudre son équation caractéristique.

On pose $V^{(o)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calculant successivement les éléments de la suite $\left\{ V^{(n)} = A^n V^{(o)} \right\}$, déterminer, avec une erreur inférieure à 10^{-4} , la valeur de la valeur propre de A dont le module est le plus grand.

Appliquant le même procédé à une matrice B appropriée et à la suite $\left\{ W^{(n)} = B^n W^{(o)} \right\}$, où $W^{(o)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, déterminer, avec une erreur inférieure à 10^{-3} , la valeur de la valeur propre de A dont le module est le plus petit.

.../...

×I3I×

Déterminer, enfin, avec une erreur inférieure à 10^{-3}, la valeur de la troisième valeur propre de A.

IV

p étant supérieur à 1, on considère le sous ensemble S de $\mathcal{M}_{p,p}$ constitué des matrices A dont les éléments $a_{i,j}$ sont des réels **strictement** positifs et vérifient la relation :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1$$

On pose : $d = \inf_{i,j} \left\{ a_{i,j} \right\}$

A^n étant la puissance n de A, on note les éléments de A^n par $a_{i,j}^{(n)}$

et on pose :

$$d_j^{(n)} = \inf_i \left\{ a_{i,j}^{(n)} \right\} \quad \text{et} \quad D_j^{(n)} = \sup_i \left\{ a_{i,j}^{(n)} \right\}$$

L'intervalle $\left[d_j^{(n)} , D_j^{(n)} \right]$ est noté $I_j^{(n)}$.

IV-1 Montrer que A^n est élément de S pout tout n.

Montrer que, pour tout j, les éléments de la colonne j de $A^{(n+1)}$ vérifient, pour tout i, les relations :

$$a_{i,j}^{(n+1)} \geqslant d_j^{(n)} + d \, (D_j^{(n)} - d_j^{(n)})$$

$$a_{i,j}^{(n+1)} \leqslant D_j^{(n)} - d \, (D_j^{(n)} - d_j^{(n)}) .$$

En déduire que les intervalles $I_j^{(n)}$ sont emboîtés et que leurs longueurs $\lambda_j^{(n)}$ vérifient : $\lambda_j^{(n)} \leqslant (1-d)^n$.

IV-2 Démontrer alors que les suites de nombres $\left\{ a_{i,j}^{(n)} \right\}$ sont convergentes.

En déduire que toute suite $\left\{ A^{(n)} = A^n \right\}$ est convergente, au sens de la norme de $\mathcal{M}_{p,p}$, vers une matrice A^{∞}, élément de S, dont toutes les lignes sont identiques.

IV-3 Soit $X^{(o)}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,1}$, on considère la suite $\left\{X^{(n)}\right\}$ définie par :

$$X^{(n)} = A^n \; X^{(o)} \quad .$$

Démontrer, par un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir les résultats de IV-1 et IV-2, que $\left\{ X^{(n)} \right\}$ converge, au sens de la norme de $\mathcal{M}_{p,1}$, vers une matrice X^{∞} dont tous les éléments sont identiques.

Appliquant ce résultat aux p matrices $X_i^{(o)}$ de $\mathcal{M}_{p,1}$ dont tous les éléments sont nuls à l'exception de celui qui est situé sur la ligne de rang i et dont la valeur est 1, retrouver le résultat selon lequel $\left\{ A^{(n)} \right\}$ converge vers une matrice A^{∞} dont toutes les lignes sont identiques.

IV-4 Montrer que $A^{\infty}A = A\,A^{\infty} = A^{\infty}$ et en déduire, A_i désignant une ligne de A^{∞} , que $A_i(A-I)$ est égal à l'élément neutre de $\mathcal{M}_{1,p}$.

IV-5 Montrer que 1 est valeur propre de toutes les matrices A de S.

Soit $s \neq 1$ une valeur propre de A élément de S : V étant un vecteur propre associé à s, étudier la suite $\left\{ V^{(n)} = A^n V \right\}$ et montrer que $|s| < 1$; en déduire que :

$$|s - d| < 1 - d.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail